

## 【式と証明 例題】

## 例題1 二項定理と多項定理

(1)  $\left(2x^2 - \frac{1}{2x}\right)^6$  の展開式における  $x^3$  の係数を求めよ。

(2)  $(1 + 3x - x^2)^8$  の展開式における  $x^3$  の係数を求めよ。

## 例題2 整式の除法

$6x^4 + 3x^3 + x^2 - 1$  を整式  $B$  で割ると、商は  $3x^2 + 2$ 、余りは  $-2x + 1$  である。 $B$  を求めよ。

## 例題3 分数式の計算

次の分数式を計算して簡単にせよ。

$$(1) \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x+1} - \frac{x+4}{x^2-x-2} \qquad (2) \frac{x+1+\frac{2}{x-2}}{x-1-\frac{2}{x-2}}$$

## 例題4 複素数の計算

$(3+i)z - 5(1+5i) = 0$  を満たすとき、 $z$  の値を求めよ。

## 例題5 複素数の相等

次の等式を満たす実数  $x, y$  を求めよ。

$$(2+i)x + (3-2i)y = -9 + 20i$$

例題6 係数に  $i$  を含む方程式

$a$  を実数の定数とするとき、

$$(2+i)x^2 + (2+ai+i)x - 4 + ai = 0$$

を満たす実数  $x$  が存在するように、 $a$  の値を求めよ。

## 例題7 解と係数の関係

2次方程式  $x^2 + ax + b = 0$  の2つの解を  $\alpha, \beta$  とする。2次方程式  $x^2 + bx + a = 0$  の解が  $\alpha + 1, \beta + 1$  であるとき、 $a, b$  の値を求めよ。

## 例題8 2数を解とする2次方程式

方程式  $x^2 - 5x + 3 = 0$  の2つの解を  $\alpha, \beta$  とし、 $\alpha^3, \beta^3$  を解にもつ2次方程式を1つ求めよ。

## 例題9 解の条件

2次方程式  $x^2 - 12x + k = 0$  の1つの解が他の解の2乗であるとき、 $k$  の値を求めよ。

## 例題 1 0 剰余の定理・因数定理

- (1)  $P(x)$  を  $x^2 - x - 2$  で割ったときの商が  $Q(x)$ 、余りが  $2x + 5$  のとき、 $P(x)$  を  $x + 1$  で割った余りを求めよ。
- (2) 整式  $x^3 + ax^2 + bx - 2$  が  $x^2 + x - 2$  で割り切れるとき、 $a, b$  の値を求めよ。

## 例題 1 1 剰余の定理①

整式  $P(x)$  を  $(x - 2)(x - 3)$  で割ると余りは  $4x$ 、 $(x - 3)(x - 1)$  で割ると余りは  $3x + 3$  である。このとき、 $P(x)$  を  $(x - 1)(x - 2)$  で割ったときの余りを求めよ。

## 例題 1 2 剰余の定理②

整式  $P(x)$  を  $(x + 1)^2$  で割ったときの余りは  $2x + 3$ 、また、 $x - 1$  で割ったときの余りは  $1$  である。 $P(x)$  を  $(x + 1)^2(x - 1)$  で割ったときの余りを求めよ。

## 例題 1 3 因数定理と高次方程式

- (1) 3次方程式  $x^3 - 6x^2 + 9x - 2 = 0$  を解け。
- (2)  $a$  を定数とする。3次方程式  $x^3 - ax^2 - (a + 3)x + 6 = 0$  の1つの解が  $x = 1$  であるとき、 $a$  の値と残りの解を求めよ。

## 例題 1 4 高次方程式の解の個数

$x^3 + (a - 2)x^2 + (1 - 2a)x - 2 = 0$  が重解をもつように  $a$  の値を定めよ。

## 例題 1 5 3次方程式の解と係数の関係

3次方程式  $x^3 - px^2 + 11x - q = 0$  が3つの連続する正の整数を解とするとき、 $p, q$  の値を求めよ。

例題 1 6 1つの解が  $p + qi$  のとき

方程式  $x^3 + ax^2 + bx + 6 = 0$  ( $a, b$  は実数) の1つの解が  $1 + i$  のとき、 $a, b$  の値と他の2つの解を求めよ。

例題 1 7 立方根  $\omega$  の性質

方程式  $x^3 = 1$  の虚数解の1つを  $\omega$  とするとき、次の値を求めよ。

- (1)  $\omega^8 + \omega^4 + 5$
- (2)  $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \cdots + \omega^{17} + \omega^{18}$

## 例題 18 恒等式

次の恒等式が成り立つように、 $a, b, c$  の値を定めよ。

$$(1) 2x^2 - 5x - 1 = a(x-1)(x-2) + b(x-2)(x-3) + c(x-3)(x-1)$$

$$(2) x^3 + 2x^2 - 4 = (x+3)^3 + a(x+3)^2 + b(x+3) + c$$

## 例題 19 条件があるときの式の値

$a + b + c = 0$  のとき、 $a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$  の値を求めよ。

## 例題 20 比例式

実数  $a, b, c$  が  $\frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = \frac{a+b}{c}$  を満たすとき、この式の値を小さい順にすべて答えよ。

## 例題 21 相加・相乗平均

$a > 0, b > 0$  のとき、 $\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{4}{a}\right)$  の最小値を求めよ。

## 例題 22 不等式の証明

次の不等式を証明せよ。

$$(1) a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$$

$$(2) \sqrt{2(x+y)} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y} \quad (x > 0, y > 0)$$

$$(3) \left(x + \frac{9}{y}\right)\left(y + \frac{1}{x}\right) \geq 16 \quad (x > 0, y > 0)$$