【複素数の計算】

目標問題

⑴ $z=\frac{(4+3i)(3-i)}{(1-3i)(1+2i)}$ とするとき、$|z-\overline{z}|$ の値を求めよ。

⑵ $z^2+z+3=0$ のとき、$|z|$ を求めよ。

⑶ $\left|\frac{z-2i}{1+2iz}\right|=1$ のとき、$|z|$ を求めよ。

⑷ $|\alpha|=|\beta|=|\alpha-\beta|=2$ のとき、$|\alpha^2+\beta^2|$ の値を求めよ。

基礎

・$z=a+bi$ において、aを_______、biを_______という。

・$z=a+bi$ に対し、$\overline{z}=a-bi$ を________________という。

・$|z|=\sqrt{\quad\quad}$ ，$|z|^2=$_______

例題

⑴ $z=5-2i$ の実部と虚部はそれぞれ何か。

⑵ $z=3+4i$ のとき、$\overline{z}$と$|z|$、$|z|^2$を求めよ。

⑶ $|\alpha|=|\beta|=1, |\alpha-\beta|=1$ のとき、$\overline{\alpha}\beta+\alpha\overline{\beta}$ の値を求めよ。

練習問題

⑴ $z=3-\sqrt{3}i$ に対し、共役な複素数 $\overline{z}$ と絶対値 $|z|$ を求めよ。

⑵ $z=1+2i$ のとき、$\left|z+\frac{1}{z}\right|$ の値を求めよ。

⑶ $|z|=\sqrt{5}, z+\overline{z}=2$ であるような複素数 z を求めよ。

⑷ $|\alpha|=|\beta|=1, |\alpha-\beta|=1$ のとき、$|\alpha+\beta|$ の値を求めよ。

【極座標】

目標問題

⑴ $z=-\sqrt{3}+i$ を極形式で表せ。

⑵ 複素数 z が $\arg z=\frac{\pi}{4}$，$\left|\frac{z+i}{1+2i}\right|=1$ を満たすとき、z の値を求めよ。

基礎

・複素数 $z=a+bi$ を表す点を P とし、線分 OP の長さを r、実軸の正の部分から半直線 OP までの回転角を θ とすると、$a=$＿＿＿，$b=$＿＿＿

よって、$z=a+bi=$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿（r＝＿＿＿）と表せ、これを＿＿＿＿という。

・極形式の θ を＿＿＿といい、$\theta=$＿＿＿ と書く。

・$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1), z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ のとき、

$z_1\cdot z_2=$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\frac{z_2}{z_1}=$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ が成り立つ。

例題

$z=1+\sqrt{3}i$ を極形式で表せ。

練習問題

⑴ $z=-2+2i$ を極形式で表せ。

⑵ 複素数 z が、$z+\frac{1}{z}=\sqrt{2}$ を満たすとき、z を極形式で表せ。

⑶ $z_1=\sqrt{3}+i, z_2=1+i$ のとき、$z_1\cdot z_2$，$\frac{z_2}{z_1}$ を極形式で表せ。

【ド・モアブルの定理】

目標問題

⑴ $\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{2002}$ の値を求めよ。　⑵ $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1+i}\right)^{10}$ の値を求めよ。

⑶ $z=\left(\frac{i}{\sqrt{3}-i}\right)^{n-4}$ が実数になるような自然数 n のうち、最小のものを求めよ。

⑷ $z^4=8\left(-1+\sqrt{3}i\right)$ を満たす複素数 z を求めよ。

基礎

・n が整数のとき、

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\underline{\qquad\qquad\qquad}$$

が成り立ち、これを＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿という。

・この定理を逆に用いることで、複素数の n 乗根を求められる。

例題

⑴ $\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{4}$ を計算せよ。

⑵ $z^3=1$ を満たす複素数 z を求めよ。

練習問題

⑴ $\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{30}$ を計算せよ。

⑵ $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{1996}$ を簡単にせよ。

⑶ $x=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ のとき、$x^{3000}+x^{2000}+x^{1000}+1$ の値を求めよ。

⑷ $z^3=8i$ を満たす複素数 z を求めよ。

【複素数と図形】

目標問題

⑴ 複素数 z が $|2z-2+6i|=4$ を満たすとき、点 z の描く図形を求めよ。

⑵ 複素数 z が $|z-1|=1$ を満たすとき、複素数平面上で $w=\frac{z-i}{z+i}$ によって定められる点 w の軌跡を図示せよ。

⑶ $|z-5i|=|i+2\overline{z}|$ を満たす点 z が複素数平面上に描く軌跡を求めよ。

基礎
・複素数平面上での$\mathrm{A}(\alpha)$と$\mathrm{B}(\beta)$の距離は、$\mathrm{AB}=$__________

例題

⑴ 複素数 z が $|z-2|=|z-i|$ を満たすとき、点 z の描く図形を求めよ。

⑵ 複素数 z が $z\overline{z}=3\overline{z}+3z$ を満たすとき、点 z の描く図形を求めよ。

練習問題

⑴ 複素数 z が $|z-3-2i|=1$ を満たすとき、点 z の描く図形を求めよ。

⑵ 複素数 z が $|z-1|=2$ を満たすとき、 $w=iz+3$ で表される点 w の描く図形を求めよ。

⑶ 複素数 z が $z\overline{z}=(1+i)\overline{z}+(1-i)z$ を満たすとき、点 z の描く図形を求めよ。

⑷ 複素数 z が $2|z-i|=|z+2i|$ を満たすとき、点 z の描く図形を求めよ。